Paul-Cosmin Manea **Dragoș Petrică**

MATEMATICĂ STANDARD

Algebră • Geometrie

Clasa a VII-a

Partea I. Modulele 1, 2

EDITURA COMPER

Cuprins

TESTE DE EVALUARE INIȚIALĂ

TESTUL 1

• *Se acordă 10 puncte din oficiu. Timp de lucru 50 de minute.*

1. a) Află cel mai mare divizor comun al numerelor 18, 60 și 120.
b) Găsește cel mai mare număr de trei cifre care se împarte exact la 6, 8 și 10.

2. a) Arată că fracția $\dfrac{8n+5}{5n+3}$ este ireductibilă, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

b) Arată că fracția $\dfrac{\overline{aaa}+\overline{bbb}}{15n+72}$ este reductibilă, unde $a, b \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}$.

3. Rezolvă în $\mathbb{Z}$ ecuațiile și inecuațiile următoare:

a) $|x-2| = 5$; b) $|x-5| \leq 4$; c) $x^2 \leq 25$; d) $(x-3)(2y+1) = 10$.

4. a) Prețul unui obiect crește cu 20%. Află cu cât trebuie redus noul preț, pentru a obține prețul inițial.
b) Prețul unui ghiozdan este mărit cu 15%, iar apoi se ieftinește cu 10%. Știind că prețul final al ghiozdanului este 72 de lei și 45 de bani, care a fost prețul inițial al ghiozdanului?

5. $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle AOC$ sunt unghiuri neadiacente, cu $m(\sphericalangle AOB) = 80°$ și $m(\sphericalangle BOC) = 30°$. Află măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor AOC și BOC.

6. Fie $(OM$ bisectoarea unghiului XOY, iar $ME \perp OX$ și $MF \perp OY$. Demonstrează că $OM \perp EF$.

TESTUL 2

1. a) Câte numere de forma $\overline{aa5}$ sunt divizibile cu 5?

b) Află toate numerele de forma $\overline{a5b9}$ divizibile cu 3, dar nedivizibile cu 9.

2. Se consideră numerele $x = \left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{6}-\dfrac{5}{12}\right)\cdot\left(\dfrac{7}{12}\right)^{-1}$ și $y = \left(\dfrac{5}{3}+\dfrac{1}{6}-\dfrac{4}{9}\right):\left(\dfrac{6}{5}\right)^{-2}\cdot 3$.

Află numerele a și b, știind că acestea sunt direct proporționale cu numerele x și y, iar $a + b = 24$.

3. Trei numere raționale sunt direct proporționale cu numerele $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}$.

a) Dacă suma numerelor este 13, află cele trei numere.
b) Care sunt numerele, dacă media lor aritmetică este 8,(6)?

4. Un rezervor conține apă potabilă pentru 60 de zile. Dacă consumul zilnic se micșorează cu 25%, află numărul de zile pentru care ajunge apa din rezervor.
5. În triunghiul ABC, $[BF]$ și $[CE]$ sunt bisectoarele triunghiului, iar $BF \cap CE = \{I\}$. Arată echivalența: $BI = CI \Leftrightarrow \Delta ABC$ este isoscel.
6. În triunghiul ABC, $[AD]$ este bisectoarea triunghiului, iar E este simetricul lui A față de D. Paralela prin E la AC taie dreapta AB în punctul P. Demonstrează că triunghiul PDE este dreptunghic.

TESTUL 3

1. Arată că $\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{cd}+\overline{da}=\overline{ad}+\overline{dc}+\overline{cb}+\overline{ba}$, unde a, b, c, d sunt cifre nenule.
2. Media aritmetică a trei numere este 150. Să se afle numerele, știind că ele sunt direct proporționale cu numerele 3, 5, 7.
3. Rezolvă ecuațiile: a) $\left|x-\frac{2}{5}\right| = 0{,}3$; b) $\frac{7x-4}{x}=\left(-\frac{2}{3}\right)^3$.
4. Fie șirul: 2, –6, 18, –54, …
   a) Scrie următorii trei termeni ai șirului.
   b) Află al 30-lea termen din șir.
5. Fie triunghiul ABC, cu $m(\sphericalangle ABC) = 75°$ și $m(\sphericalangle ACB) = 20°$. Află măsura unghiului exterior cu vârful în A.
6. Fie ABC un triunghi isoscel, de bază $[BC]$, iar $[CD]$ înălțimea triunghiului dusă din C, $D \in (AB)$. Dacă $2 \cdot CD = AB$, află $m(\sphericalangle B)$.

TESTUL 4

1. Calculează: a) $\left(-\frac{14}{9}\right):\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}$; b) $1-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2$.
2. Află numerele naturale de forma $\overline{3a4b}$ divizibile cu:
   a) 10; b) 3; c) 30.
3. Află $m \in \mathbb{Q}$, astfel încât 2 să fie soluție a ecuației $\frac{m+1}{2}\cdot x-0{,}5=\frac{5}{4}$.
4. Fie expresia $E(x) = |x + 3| + |x - 5|$.
   a) Află valoarea lui $E(x)$ pentru $x = -2$.
   b) Arată că $E(x) \geq 8$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Q}$.
5. Triunghiul ABC este dreptunghic în A, cu $m(\sphericalangle ABC) = 70°$. Află măsura unghiului format de mediana și înălțimea duse din vârful A.
6. Fie triunghiul ABC, M mijlocul lui $[BC]$ și $N \in (AM)$, astfel încât $\sphericalangle BNM \equiv \sphericalangle CNM$. Demonstrează că ΔABC este isoscel.

ALGEBRĂ

Capitolul I

MULȚIMEA NUMERELOR REALE

Lecția 1. Rădăcina pătrată a unui număr natural pătrat perfect

❶ CE TREBUIE SĂ REȚIN

Numărul natural x se numește pătrat perfect, dacă există un număr întreg a cu proprietatea că $x = a^2$ (1).

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ dacă } a \geq 0 \\ -a, \text{ dacă } a < 0 \end{cases}$$

Reguli de calcul cu puteri:

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

2) $a^m : a^n = a^{m-n}$, $m \geq n$;

3) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$;

4) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$;

5) $(a : b)^n = a^n : b^n$, dacă $a \vdots b$ și $b \neq 0$.

$U(a^2) \in \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$, unde $U(a^2)$ reprezintă ultima cifră a lui a^2.

▸ Numărul $|a|$ din relația (1) se numește rădăcina pătrată a numărului x și se notează $\sqrt{x}$. Prin urmare, avem echivalența: $x = a^2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = |a|$, $a \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{N}$.

Exemplu: $\sqrt{36} = 6$, deoarece $|6| = |-6| = 6$.

▸ Rădăcina pătrată a lui a ($a \in \mathbb{N}$) se mai numește radical de ordinul doi din a.

▸ Operația de găsire a lui $\sqrt{a}$ se numește extragerea rădăcinii pătrate.

Exemplu: Găsește pătratele perfecte cuprinse între 200 și 500 și extrage rădăcinile pătrate ale acestora.

Pătratele sunt: 225, 256, 289, 324, 361, 400, 441 și 484.

Rădăcinile pătrate sunt: $\sqrt{225} = 15$, $\sqrt{256} = 16$, ..., $\sqrt{484} = 22$.

▸ În concluzie, fiind dat un număr nenegativ a, numărul notat cu $\sqrt{a}$, cu proprietățile: $\sqrt{a} \geq 0$ și $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, se numește rădăcina pătrată a lui a.

Atenție!

1) $\sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow a = b$; $a, b \in \mathbb{N}$. 2) $a^2 = b \Leftrightarrow a = \sqrt{b}$; $a, b \in \mathbb{N}$.

3) $\sqrt{a^2} = |a|$, oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}$. 4) $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{N}$.

Extragerea rădăcinii pătrate dintr-un număr pătrat perfect

➤ Pentru a calcula rădăcina pătrată, avem mai multe metode:

• descompunem numărul în factori primi și scriem numărul ca putere (de 2 sau multipli de 2). Baza puterii este rădăcina pătrată, baza fiind un număr pozitiv.

Exemple: $256 = 2^8 = (2^4)^2 \Rightarrow \sqrt{256} = 2^4 = 16$;

$324 = 2^2 \cdot 3^4 = (2 \cdot 3^2)^2 \Rightarrow \sqrt{324} = 2 \cdot 3^2 = 18$.

• folosim algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate.

Exemplu: $\sqrt{\underline{12}\,\underline{96}} = \ldots$ – se desparte numărul în grupe de câte două cifre de la dreapta la stânga;

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{\underline{12}\,\underline{96}} & 3 \\ \hline & \end{array}$$

căutăm numărul cel mai mare al cărui pătrat nu depășește 12;

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{\underline{12}\,\underline{96}} & 3 \\ \hline \underline{9} & 6 \\ \ \ 396 & \end{array}$$

lângă primul rest 3 coborâm grupa a doua, 96, și dublăm primul cât, 3;

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{\underline{12}\,\underline{96}} & 36 \\ \hline \underline{9} & 66 \cdot 6 \\ \ \ 396 & \\ \ \ \underline{396} & \\ \ \ === & \end{array}$$

vedem de câte ori se cuprinde 6 în 39 (de 6 ori) și-l adăugăm lângă numărul dublat, apoi înmulțim cu el; ne dă restul 0 la scădere și obținem astfel $\sqrt{1296} = 36$.

2 SĂ ÎNVĂȚĂM ÎMPREUNĂ

1. Calculează:

a) $\sqrt{36} - \sqrt{25}$; b) $\sqrt{49} + \sqrt{100}$; c) $\sqrt{36+64}$; d) $\sqrt{100-64}$.

Soluție: a) $\sqrt{36} - \sqrt{25} = 6 - 5 = 1$; b) $\sqrt{49} + \sqrt{100} = 7 + 10 = 17$; c) $\sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$; d) $\sqrt{100-64} = \sqrt{36} = 6$.

2. Adevărat sau fals?

a) $\sqrt{81} = -9$; b) $\sqrt{121} = 12$;

c) $\sqrt{144} = |-12|$; d) $\sqrt{101^2} = 101$.

Soluție: a) F; b) F; c) A; d) A.

3. Folosind algoritmul de extragere, obținem:

a) $\sqrt{14884} = 1\ldots$; b) $\sqrt{63001} = 2\ldots$.

Soluție: a) 122; b) 251.

4. Găsește valorile lui x din egalitățile:

a) $\sqrt{x} = 17$; b) $\sqrt{x} = 75$; c) $\sqrt{x} = 123$.

Soluție: a) $\sqrt{x} = 17 \Rightarrow x = 17^2 = 289$; b) $\sqrt{x} = 75 \Rightarrow x = 75^2 = 5625$; c) $\sqrt{x} = 123 \Rightarrow x = 15129$.

➨ Alege metoda mai ușoară de rezolvare a problemei:
Calculează $\sqrt{49 \cdot 64 + 49 \cdot 36}$.

Metoda I

$\sqrt{49 \cdot 64 + 49 \cdot 36} = \sqrt{49(64+36)} = \sqrt{49 \cdot 100} = \sqrt{4900} = 70.$

Metoda a II-a

$\sqrt{49 \cdot 64 + 49 \cdot 36} = \sqrt{3136 + 1764} = \sqrt{4900} = 70.$

5. Care număr este mai mare: $1{,}73 \cdot \sqrt{4}$ sau $1{,}41 \cdot \sqrt{9}$?

Soluție: Avem $1{,}73 \cdot \sqrt{4} = 1{,}73 \cdot 2 = 3{,}46$, iar $1{,}41 \cdot \sqrt{9} = 1{,}41 \cdot 3 = 4{,}23$. Prin urmare, al doilea număr este mai mare.

6. Află elementele mulțimii: $A = \left\{ x \,\middle|\, x \in \mathbb{Z}, \frac{-6+\sqrt{16}}{2} < x < \frac{-3+\sqrt{49}}{2} \right\}$.

Soluție: Relațiile conduc la $\frac{-6+4}{2} < x < \frac{-3+7}{2} \Leftrightarrow -1 < x < 2$. $A = \{0, 1\}$.

7. Află x din: $\frac{x}{\sqrt{81}} = \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{2025}}$.

Soluție: $\frac{x}{9} = \frac{15}{45} \Leftrightarrow x = \frac{9 \cdot 15}{45} = 3$.

8. Știind că aria unui pătrat este egală cu 169 m^2, află lungimea laturii sale.

Soluție: $\mathcal{A}_{\text{pătrat}} = l^2 \Rightarrow l^2 = 169 \Rightarrow l = \sqrt{169} = 13$ m.

9. Află x și y distincte, astfel încât numărul $\sqrt{\overline{1xy}}$ să fie număr natural.

Soluție: Fie $\sqrt{\overline{1xy}} = a$, $a \in \mathbb{N}$. Atunci $\overline{1xy} = a^2$. Or, pătratele de forma $\overline{1xy}$ $(x \neq y)$ sunt: 121, 169 și 196 $\Rightarrow (x, y) \in \{(2, 1), (6, 9), (9, 6)\}$.

❸ CUM APLIC CE AM ÎNVĂȚAT

Standard minimal

1. Se dau numerele: –6, –3, 12, –8, 9, –23, 17, 55, 83. Scrie:
a) modulele lor; b) pătratele lor.

2. Verifică, fără a aplica algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate, dacă:
a) $\sqrt{3721} = 61$; b) $\sqrt{4356} = 66$; c) $\sqrt{1225} = 45$;
d) $\sqrt{15129} = 123$; e) $\sqrt{2^{24}} = 2^{13}$.

3. Află numerele negative x, pentru care avem:
a) $x^2 = 49$; b) $x^2 = 144$; c) $x^2 = 256$;
d) $x^2 = 10000$; e) $4x^2 = 100$; f) $9x^2 = 5625$.

4. Calculează:
a) $\sqrt{3^2+4^2}$; b) $\sqrt{3^4}-\sqrt{2^6}$; c) $\sqrt{4\cdot 25}$;
d) $\dfrac{\sqrt{25+75}}{5}$; e) $\sqrt{(11+14)^2}$; f) $\sqrt{13^2-5^2}$.

5. Descompunând numerele în factori primi, extrage:
a) $\sqrt{576}$; b) $\sqrt{1089}$; c) $\sqrt{1225}$;
d) $\sqrt{2500}$; e) $\sqrt{1156}$; f) $\sqrt{529}$.

6. Ordonează crescător numerele: $10\sqrt{2\cdot 8}$, $6\sqrt{3\cdot 27}$, $\dfrac{9}{2}\sqrt{36}$.

7. Folosind algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate, calculează:
a) $\sqrt{2704}$; b) $\sqrt{1089}$; c) $\sqrt{1681}$;
d) $\sqrt{3481}$; e) $\sqrt{7921}$; f) $\sqrt{12996}$;
g) $\sqrt{292681}$; h) $\sqrt{323761}$; i) $\sqrt{729316}$.

8. Rezolvă în mulțimea numerelor întregi ecuațiile:
a) $x^2 = 16$; b) $5x^2 = 180$; c) $x^2 = 729$;
d) $\dfrac{4}{x} = \dfrac{x}{9}$; e) $(x + 1)^2 - 64 = 0$;
f) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = x^2$; g) $2016 + 2015 \cdot 2016 = x^2$.

9. Dacă $\sqrt{a} = 5^{2017}$ ($a \in \mathbb{N}$), găsește ultima cifră a numărului a.